



L'equazione di Schreiner

L'equazione che governa l'assorbimento dell'inerte nei tessuti è abbastanza ben nota, nel senso che la si può trovare su parecchi testi, dispense e pagine web.

L'ipotesi che è alla base del classico "esponenziale" è che la pressione dell'inerte sia costante; ciò è verificato nel caso di immersioni a profilo quadro ma cosa accade nei tratti in cui ci si sposta a velocità costante, ad esempio?

Quello citato è solo uno dei casi che possono darsi in pratica; lo spostamento tra una profondità e l'altra può avvenire a pressione parziale di ossigeno costante (come nei CCR a controllo elettronico) oppure a frazione di inerte costante, eccetera. Ma la maggior parte di questi casi può essere ricondotta a una manciata; dei pochi casi fondamentali, tratteremo quello più frequente in pratica.

Nel caso, le equazioni "rilevanti" per il solo uso pratico sono la [eq. 2] e la [eq. 9]; inoltre, più sotto si può trovare un [esempio svolto](#).

Per l'uso pratico dei risultati non è necessario conoscere il calcolo differenziale anche se è richiesta una conoscenza elementare dei logaritmi.



Partiamo dall'equazione differenziale del passaggio in soluzione che nell'ipotesi di regime perfusionale è:

$$dp = k(P - p)dt \quad [1]$$

in cui

p è la incognita tensione dell'inerte nel tessuto, funzione del tempo;

P è la pressione alveolare dell'inerte, assunta costante;

k è la costante di velocità, pari a $\log 2/T$ dove a sua volta T è il semiperiodo del tessuto;

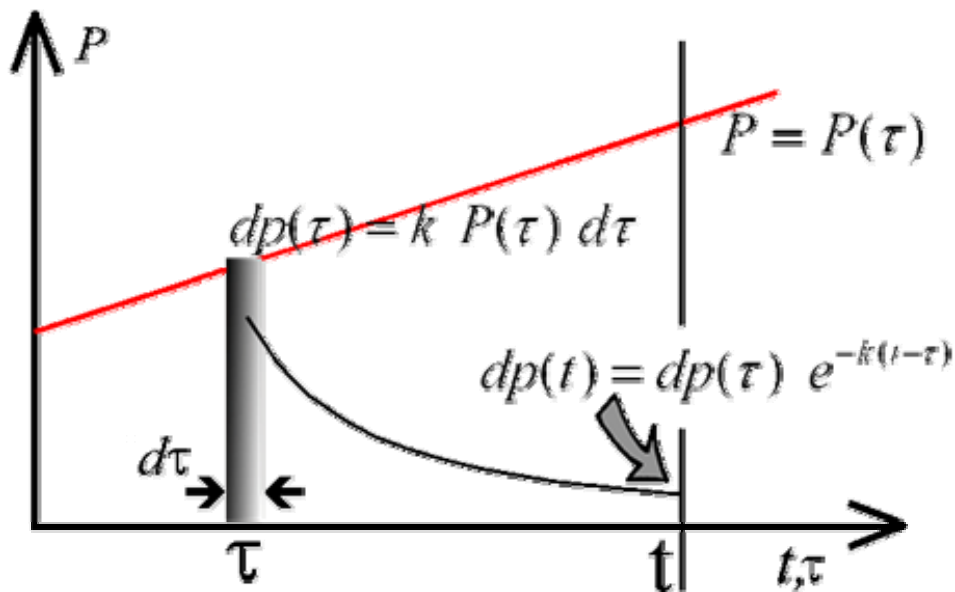
la quale risolta, dà:

$$p(t) = P_0 + (P - P_0) (1 - e^{-kt}) \quad [2]$$

in cui P_0 è la tensione all'istante iniziale $t=0$.

Il caso più generale di una pressione alveolare P variabile nel tempo può essere affrontato ponendo P funzione del tempo e risolvendo l'equazione differenziale [1] per il caso specifico.

Vorrei qui proporre una soluzione alternativa basata sulla linearità dell'equazione differenziale. Consideriamo la figura seguente, in cui supponiamo una P variabile linearmente, anche se la formulazione è del tutto generale.



Consideriamo di voler conoscere la tensione all'istante t di un tessuto inizialmente scarico e poniamoci al generico istante "tau".

Nell'intervallo di tempo infinitesimo " $d\tau$ " il tessuto si caricherà di una tensione dp pari a (usiamo la [1] con $p=0$ poiché il singolo "impulso" di tensione avviene a tessuto scarico):

$$dp(\tau) = k P(\tau) d\tau \quad [3]$$

All'istante t , la tensione iniziale dp sarà decaduta secondo la [2]; otteniamo quindi, ponendo nella [2] $P_0 = 0$, $P = dp$, e considerando che il decadimento avviene nell'intervallo di tempo $(t-\tau)$:

$$dp(t) = [k P(\tau) d\tau] e^{-k(t-\tau)} \quad [4]$$

A questo punto, "sommando" tutti i contributi tra zero e tau, e portando fuori dall'integrale k che è costante, possiamo scrivere:

$$p(t) = k \int_0^t P(\tau) e^{-k(t-\tau)} d\tau \quad [5]$$

Notiamo che – pur avendo premesso che tratteremo una variazione lineare di P - fin qui non abbiamo fatto alcuna ipotesi su P medesima e che quindi il metodo può essere applicato ad altri casi.



Inoltre, così facendo abbiamo evitato l'equazione differenziale; mal che vada, ovvero impossibilità di una risoluzione in forma chiusa, è di solito più semplice risolvere numericamente un integrale piuttosto che un'equazione differenziale.

Poniamo ora:

$$P = m\tau + q \quad [6]$$

In modo da mantenere un'aspetto "familiare" ai calcoli che seguono.

Ovviamente m ha le dimensioni di una pressione per unità di tempo (insomma, una velocità di variazione della pressione) e q semplicemente quelle di una pressione.

Otteniamo:

$$p(t) = k \int_0^t (m\tau + q) e^{-k(t-\tau)} d\tau \quad [7]$$

L'integrale, in questo caso, è banale (per non confondersi, ricordare sempre che la variabile di integrazione è tau). Il risultato è:

$$p(t) = \left(\frac{m}{k} - q\right) e^{-kt} + \left(mt - \frac{m}{k} + q\right) \quad [8]$$

Ma non è finita: non dobbiamo dimenticare che tutto questo calcolo presuppone il tessuto inizialmente scarico.

Possiamo allora, per tenere conto della tensione iniziale, immaginare che all'istante zero vi sia una tensione pari a P_0 che a sua volta decade nell'intervallo $[0, t]$ ed essendo il sistema lineare, questa tensione si può sommare all'espressione testé ricavata.

Otteniamo, finalmente:

$$p(t) = \left(\frac{m}{k} - q + P_0\right) e^{-kt} + \left(mt - \frac{m}{k} + q\right) \quad [9]$$

Possiamo constatare che per $m=0$ e – per coerenza con la [2] – ponendo $q=P$, l'espressione [9] si riduce alla [2], come ci aspettavamo.

Ebbene, la [9] è una delle famose equazioni di Schreiner e ci consente di calcolare la tensione in un compartimento a seguito di una variazione lineare di pressione parziale di inerte alveolare, caso usuale nei tratti di discesa o risalita a velocità costante.

Chi anche solo poco conosce la teoria dei segnali avrà immediatamente riconosciuto nella [5] qualcosa di molto familiare; in effetti si tratta della convoluzione tra due funzioni, in cui la funzione di risposta è il decadimento esponenziale.



E' veramente affascinante constatare ancora una volta come i campi più diversi possano essere interconnessi in qualche modo; se conosci la teoria dei segnali sei in grado di capire da te le implicazioni della [5] se no, a che pro che le dica io?



ESEMPIO

Come esempio di applicazione, consideriamo di voler calcolare la tensione in un comparto di semiperiodo $T=15 \text{ min}$ per un'immersione di 20 minuti a 40 metri, profondità raggiunta con una velocità di discesa di 5 m/min (il tempo di 20' è quello effettivo ai 40 metri, esclusa quindi la discesa).

Il gas utilizzato è aria e il sub è reduce da una precedente immersione che ha lasciato in quel comparto una tensione di 1.1 bar di azoto.

Iniziamo con il calcolare le quantità che entrano nella [9].

1) Riguardo k , come abbiamo visto esso vale semplicemente il logaritmo naturale di 2 diviso il semiperiodo, ovvero $0.6931/15=0.04621$, e questo è banale.

2) Per quanto riguarda m ci occorrono anzitutto le pressioni parziali alveolari. In superficie abbiamo 0.79 bar mentre a 40 metri abbiamo 3.95 bar (ricordo che il gas respirato è l'aria).

Per passare da zero a 40 metri con velocità di 5 m/min occorrono 8 minuti.

Ricordo anche che m è la velocità di variazione della pressione parziale alveolare (insomma, nel caso tu stia iniziando a confonderti, la tensione residua di 1.1 bar non riguarda m in alcun modo).

Il valore di m sarà dunque:

$$m = \frac{3.95 - 0.79}{8} = 0.395 \text{ bar/min}$$

3) Per quanto concerne q , questo è semplicemente il valore iniziale della pressione parziale alveolare, ovvero i 0.79 bar della superficie.

4) Per quanto riguarda P_0 , esso è il valore inizialmente presente nel tessuto, che è 1.1 bar , come dal testo dell'esempio.

Adesso possiamo sostituire i valori nella [9] trovando così la tensione nel comparto al momento in cui il sub raggiunge i 40 metri ma non ha ancora iniziato il tempo di fondo.

Ovviamente, il tempo t che compare nella [9] è quello che occorre per andare dalla superficie ai 40 metri, ovvero 8 minuti. Abbiamo dunque:

$$p = \left(\frac{0.395}{0.04621} - 0.79 + 1.1 \right) e^{-0.04621 \cdot 8} + \left(0.395 \cdot 8 - \frac{0.395}{0.04621} + 0.79 \right)$$

ovvero



$$p = (8.5479 - 0.79 + 1.1) * 0.69096 + (3.16 - 8.5479 + 0.79) = 1.5226 \text{ bar}$$

Ora, per il tratto di 20 minuti utilizziamo la [2] in cui poniamo $P_0=1.5226 \text{ bar}$, $P=3.95 \text{ bar}$, k come prima e $t=20 \text{ min}$.

Abbiamo:

$$p = 1.5226 + (3.95 - 1.5226)(1 - e^{-0.0462120}) = 2.9867 \text{ bar}$$

Quest'ultimo è il valore cercato della tensione al 20° minuto di permanenza con l'immersione ipotizzata, ovvero il risultato cercato.

Per curiosità, possiamo calcolare il valore della tensione in regime "uso tabella", ovvero immaginando di aver trascorso $(20+8)=28$ minuti a 40 metri.

Sempre utilizzando la [2] e senza dilungarmi sui valori, che dovrebbero essere ovvii, otteniamo:

$$p = 1.1 + (3.95 - 1.1)(1 - e^{-0.0462128}) = 3.1685 \text{ bar}$$

E a questo punto, può essere interessante calcolare il rapporto tra i valori trovati nei due casi, rapporto che assume il senso di "ordine di grandezza" della differenza tra le due situazioni.

Vale evidentemente $3.1685/2.9867=1.061$ ovvero la tabella presuppone circa il 6% in più di inerte rispetto al calcolo "esatto".

Questo e altri esempi che potremmo divertirci a fare mostrano che le variazioni dovute a "uso scorretto" delle tabelle sono teoricamente piccole, anche se non sarò io a trarre le conseguenze di tutto ciò.

Corrado Bonuccelli

<http://www.archeopteryx.org/cor/index.htm>
info@archeopteryx.org



28/06/2005

www.wreckdiveliguria.com

info@wreckdiveliguria.com

Logistics for Divers from Abroad

Tel/Fax +39-0141-213963 – Mobil. +39-349-13 36 764